

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-3)^n}{n5^n}, \quad a_n = \frac{1}{n5^n}$$

$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\frac{1}{n \cdot 5}} \rightarrow \frac{1}{5}$. Tedy poloměr konvergence je 5. Střed je v bode 3.

Uvažme hranici kruhu konvergence, tedy body ve tvaru $z = 5e^{i\varphi} + 3$, $\varphi \in [0, 2\pi)$.

Po dosazení máme

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 5^n} (5e^{i\varphi} + 3 - 3)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in\varphi}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\varphi}{n} + i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\varphi}{n}$$

Pro $\varphi \neq 0$ mají $\sum \cos n\varphi$ a $\sum \sin n\varphi$ omezené částečné součty.

Zaroveň $\frac{1}{n} \rightarrow 0$. Tedy pro $\varphi \neq 0$ konvergují obě řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\varphi}{n}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\varphi}{n}$.

Pro $\varphi = 0$ dostáváme řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ a $\sum_{n=1}^{\infty} 0$, přičemž první z nich diverguje.

Celkem: $\sum a_n$ konverguje pro body z splňující $|z-3| < 5$ absolutně
dále konverguje (neabsolutně) pro body ve tvaru $z = 3 + 5e^{i\varphi}$, $\varphi \neq 0$ mod 2π .
Pro ostatní body diverguje.

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} a^{n^2} z^n, \quad a_n = a^{n^2} \quad (a > 0)$$

$$\sqrt[n]{a_n} = a^n \rightarrow \begin{array}{lll} 0 & a \in (0, 1) & \rightarrow \text{poloměr konvergence} = \infty \rightarrow \text{řada konverguje na } \mathbb{C} \\ 1 & a = 1 & \rightarrow = 1 \\ \infty & a > 1 & \rightarrow = 0 \rightarrow \text{řada konverguje v počátku} \end{array}$$

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n + b^n}{n} z^n, \quad a_n = \frac{a^n + b^n}{n} \quad (\text{BÚNO } |b| \geq |a|)$$

$$\bullet \sqrt[n]{|a_n|} \leq \sqrt[n]{\frac{2|b|^n}{n}} = \sqrt[n]{\frac{2}{n}} \cdot |b| \quad (\rightarrow |b|) \quad \text{Tedy } \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \leq |b|$$

$$\bullet \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[2n]{|a_{2n}|} \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[2n]{|b|^{2n}} = |b|$$

Celkově $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = |b|$ a pomocí konvergence je $\boxed{\frac{1}{|b|}}$

Přes $z = \frac{1}{|b|} e^{i\varphi}, \varphi \in [0, 2\pi)$ dostáváme řadu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n + b^n}{n} \cdot \frac{1}{|b|^n} e^{in\varphi} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\left(\frac{a}{|b|} \right)^n + (\operatorname{sgn} b)^n \right) e^{in\varphi}$$

Pokud $|a| < |b|$, pak $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{a}{|b|} \right)^n e^{in\varphi}$ konverguje absolutně (srovnání s $\sum \left(\frac{a}{|b|} \right)^n$)

Vyšetřeme konvergenci $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (\operatorname{sgn} b)^n e^{in\varphi}$.

Pokud $\operatorname{sgn} b = 1$, potom dostáváme řadu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in\varphi}}{n}$ (viz pří 1)

Pokud $\operatorname{sgn} b = -1$ potom dostáváme

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} e^{in\varphi} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} e^{in\pi} e^{in\varphi} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} e^{in(\varphi+\pi)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(\varphi+\pi)}{n} + i \frac{\sin(\varphi+\pi)}{n}$$

Analogicky s příkladem (1) dostaneme, že řada konverguje právě tehdy, když $\varphi \neq \pi$

lehkost pro $|a| < |b|$ dostáváme

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n + b^n}{n} \cdot \frac{1}{|b|^n} e^{i\varphi n} \text{ konverguje pro } \varphi \in [0, 2\pi) \text{ kromě případů } \begin{cases} \bullet b > 0, \varphi = 0 \\ \bullet b < 0, \varphi = \pi \end{cases}$$

Případ $|a| = |b|$ řešíme analogicky.

$$(4) \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} (z-1)^n, \quad a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}$$

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \rightarrow e. \text{ Poloměr konvergence je tedy } \frac{1}{e}.$$

$$\text{Pro } z = 1 + \frac{1}{e} e^{i\varphi} \text{ dostáváme řadu } \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} \cdot \frac{1}{e^n}}_{\alpha_n} e^{i n \varphi}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{n^2 \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) - n} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}}} = e^{-\frac{1}{2}} \neq 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log(1+x) - x}{x^2} \stackrel{\text{L'Hospital}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{1+x} - 1}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-x}{2x(1+x)} = -\frac{1}{2}$$

Řada tedy diverguje (než splňuje nulová podmínka)

$$(5) \sum_{n=1}^{\infty} n z^n =: f(z) \quad (|z| < 1) \quad \text{derivování mocniných řad člen po členu}$$

$$f(z) = z \cdot \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot z^{n-1} = z \cdot \sum_{n=1}^{\infty} (z^n)' = z \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} z^n \right)' = z \cdot \left(\frac{z}{1-z} \right)' = z \cdot \frac{1-z+z}{(1-z)^2} = \boxed{\frac{z}{(1-z)^2}}$$

$$(6) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} =: S(z) \quad (|z| < 1)$$

$$S'(z) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{z^n}{n} \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} z^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$$

Tedy $S(z) \stackrel{C}{=} -\log(1-z)$

Protože $S(0) = 0$ dostáváme $\boxed{S(z) \stackrel{C=0}{=} -\log(1-z)}$

$$(7) \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) z^n =: S(z) \quad (|z| < 1)$$

$$\begin{aligned} S(z) &= z^2 \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) z^{n-2} = z^2 \sum_{n=2}^{\infty} [n z^{n-1}]' = z^2 \left(\sum_{n=1}^{\infty} n z^{n-1} \right)' = z^2 \left(\sum_{n=2}^{\infty} (z^n)' \right)' \\ &= z^2 \left(\sum_{n=2}^{\infty} z^n \right)'' = z^2 \left(\frac{z^2}{1-z} \right)'' = \boxed{\frac{2z^2}{(1-z)^3}} \end{aligned}$$

$$\left(\frac{z^2}{1-z} \right)'' = \left(z + 1 + \frac{1}{1-z} \right)'' = \frac{2}{(1-z)^3}$$

$$(8) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n 2^n} =: S$$

Položme $S(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} = -\log(1-z)$ pro $|z| < 1$ (příklad (6))

Tedy $S = S\left(\frac{1}{2}\right) = -\log\left(\frac{1}{2}\right) = \boxed{\log 2}$

$$(9) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n-1)!} = S$$

$$S = f(1) \quad \text{pro} \quad f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n-1)!} z^{n-1}$$

$$\text{Dále} \quad f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{z^n}{(n-1)!} \right)' = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{(n-1)!} \right)' = \left(z \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} \right)' = \left(z \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \right)' = (z \cdot e^z)' = (z+1)e^z$$

$$\text{Tedy} \quad S = (z+1)e^z \Big|_{z=1} = \boxed{2e}$$

$$(10) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1} =: S$$

$$\text{Položme} \quad f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1} z^{2n-1} \quad (|z| < 1)$$

$$\text{Dále} \quad f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n}{2n-1} z^{2n-1} \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n z^{2n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} z^{2n} = - \sum_{n=0}^{\infty} (z^2)^n = - \frac{1}{1+z^2} \quad (\text{stále } |z| < 1)$$

$$\text{Tedy} \quad f(z) \stackrel{c}{=} -\arctan z \quad \text{z} \quad f(z) \stackrel{c}{=} -\arctan z \quad \begin{matrix} f(0)=0 \Rightarrow C=0 \\ \text{Leibniz} \end{matrix}$$

$$\text{Řada} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1} \quad \text{konverguje, tedy} \quad S = \lim_{z \rightarrow 1-} f(z) = -\arctan 1 = \boxed{-\frac{\pi}{4}}$$

$$(11) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(n+1)} = S$$

$$\text{Položme} \quad f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(n+1)} z^{n+1} \quad (|z| < 1)$$

$$\text{Potom} \quad f''(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n z^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} z^n = - \sum_{n=0}^{\infty} (-z)^n = - \frac{1}{1+z}$$

$$\text{Tedy} \quad f'(z) \stackrel{c}{=} -\log(z+1). \quad \text{Dále} \quad \int \log x = x \log x - \int 1 dx = x \log x - x$$

$$\text{Tedy} \quad f(z) = -((z+1) \log(z+1) - (z+1)) + C_1 z + D \quad \text{pro nějaké konstanty } C_1, D \in \mathbb{R}.$$

Dále $S(0) = S'(0) = 0$. Tedy $D = -1$, $C = 0$.

celkem $f(z) = -(z+1) \log(z+1) + z$.

Dále $\sum a_n$ konverguje (dokonce absolutně např. srovnáním s $\sum \frac{1}{n^2}$)

Tedy $S = \lim_{z \rightarrow 1} f(z) = \boxed{-2 \log 2 + 1}$

(12) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(2n+1)!} = S$
 $\nwarrow a_n$

Položme $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n z^{n-1}}{(2n+1)!}$ $z \in \mathbb{R}$

Potom $f(z) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{(2n+1)!} \right)' \underset{z>0}{=} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\sqrt{z})^{2n}}{(2n+1)!} \right)' = \left(\frac{1}{\sqrt{z}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\sqrt{z})^{2n+1}}{(2n+1)!} + \sqrt{z} - \sqrt{z} \right) \right)'$
 $\text{sinh } \sqrt{z}$

$$= \left(\frac{\sinh \sqrt{z}}{\sqrt{z}} - 1 \right)' = \frac{\cosh \sqrt{z}}{2z} - \frac{\sinh \sqrt{z}}{z^{\frac{3}{2}}}$$

Protože $S = f(1) = \frac{\cosh 1}{2} - \frac{\sinh 1}{2} = \frac{1}{4} \left(e + \frac{1}{e} - e + \frac{1}{e} \right) = \boxed{\frac{1}{2e}}$